Algebrai görbék leszámolása

Gyenge Ádám
Algebra és Geometria tanszék

2024.10.21.

Algebrai geometria

Wikipédia: Az *algebrai geometria* a matematikának egy olyan ága, amely absztrakt algebrai technikákat használ, főleg a kommutatív algebrából, geometriai problémák megoldására. Klasszikusan többváltozós polinomok nullahelyeit tanulmányozza; a modern megközelítés ezt sok vonatkozásban általánosítja.

Az eddigi kiosztott **Fields érmek** alapján az algebrai geometria a "legdíjazottabb" terület:

- Kodaira ('54), Serre ('54), Atiyah ('66), Grothendieck ('66), Hironaka ('70), Bombieri ('74), Mumford ('74), Deligne ('78), Yau ('82), Faltings ('86), Drinfeld ('90), Mori ('90), Kontsevich ('98), Voevodsky (2002), Okounkov (2006), Bao Chao (2010), Bhargava (2014), Mirzakhani (2014), Birkar (2018), Scholze (2018), Huh (2022)

Algebrai görbék

- **Definíció:** Az algebrai görbék azon a geometriai alakzatok, amelyek egy polinom egyenlet megoldásaiként jönnek létre a síkon vagy a térben.
- **Példák:**
  - *Lináris görbék:* $y = mx + b$ (egyenesek).
  - *Kvadratikus görbék:* $y = ax^2 + bx + c$ (parabolák).
  - *Harmadfokú görbék:* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- **Tulajdonságok:**
  - *Dimenzió:* A görbék 1 dimenziósak.
  - *Fok:* A polinomban megjelenő legmagasabb hatvány.
  - *Szingularitás:* A görbe olyan pontjai, ahol nem definiálható az érintőegyenes.

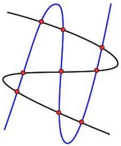
Algebrai görbék: Bézout tétel

Projektív geometria: a tér „végtelen távoli” térelemekkel való kibővítése.

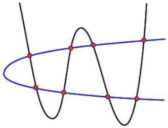
Érdemes az algebrai görbéket a projektív térben tekinteni.

Bézout tétel: Két projektív algebrai görbe metszéspontjainak száma = a fokok szorzata

$$N = \deg C_1 \cdot \deg C_2$$



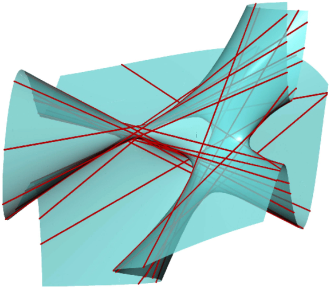
Két harmadfokú görbe

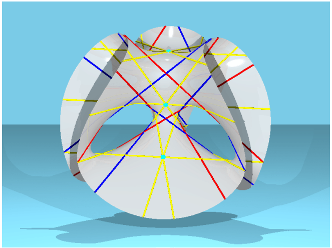


Egy másod- és egy negyedfokú

Görbék Számolása - Klasszikus Eredmények

- **Tétel:** A projektív térben minden sima harmadfokú felületen pontosan 27 egyenes található.
- **Háttér:**
  - A 19. századi geometria egyik legismertebb eredménye.
  - Leszámláló geometria, Schubert kalkulus.
  - Minden egyenes pontosan 10 másikat metsz.
- **Illusztráció:**





Racionális görbék a síkban

Racionális görbe: génusz $g = 0$

Kérdés: Hány racionális d-ed fokú görbe illeszkedik a (projektív) síkon $3d - 1$ általános helyzetű pontra?

Jelölje ezt a számot N_d.

- $N_1 = N_2 = 1$ (Euklidész)
- $N_3 = 12$ (Steiner, 1848)
- $N_4 = 620$ (Zeuthen, XIX. sz. vége)

Kvantum Kohomológia

- Kontsevich (Field érem, '98)
- Megadja N_d-t tetszőleges d-re
- A kvantum kohomológia egy új matematikai struktúra, amely egy a kvantumelméletből jött megközelítést használ az algebrai geometriában.
- Előzmények: Gromov, Witten
- A klasszikus kohomológia kiterjesztése.

Stabil Görbék és Gromov-Witten invariánsok

- **Definíció:** Egy algebrai görbe *stabil*, ha az automorfizmus csoportja véges. Ennek eléréséhez pontokat rögzítünk a görbén (pl. $\mathbb{P}^1$ min. 3 ponttal.)
- **Modulus tér:** A n-pontozott, g genuszú, stabil görbéknek létezik egy $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ modulus tere
- **Gromov-Witten invariánsok:**

$$GW_{g,n}(X,\beta) = \int_{\mathcal{M}_{g,n}(X,\beta)} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n} \cdot \mathrm{ev}_1^* \alpha_1 \cdots \mathrm{ev}_n^* \alpha_n,$$

  ahol:
  - g: a görbék genusza
  - n: a leképezett pontok száma
  - X: a tér, ahova képezünk
  - β: a görbe képének homológiaosztálya
  - ψ_i a pontok osztályát, ev_i pedig az i-edik megjelölt ponton vett kiértékelést reprezentálja.
- Alkalmazás (H a hipersík osztály):

$$N_d = GW_{0,3d-1}(\mathbb{P}^2, dH).$$

Lehetséges témák

- **BSc:**
  - Bezout tétel
  - 27 egyenes a harmadfokú síkon részletes megértése
- **MSc:**
  - Gromov-Witten invariánsok megértése
  - Hilbert sémák
- **PhD:**
  - Kvantum kohomológia
  - Donaldson-Thomas invariánsok (a Gromov-Witten invariánsok duális párjai)